

إصلاح

مواضيع الدورة الرئيسية

جوان 2018

شعبة التقنية

A. PARTIE GENIE MÉCANIQUE

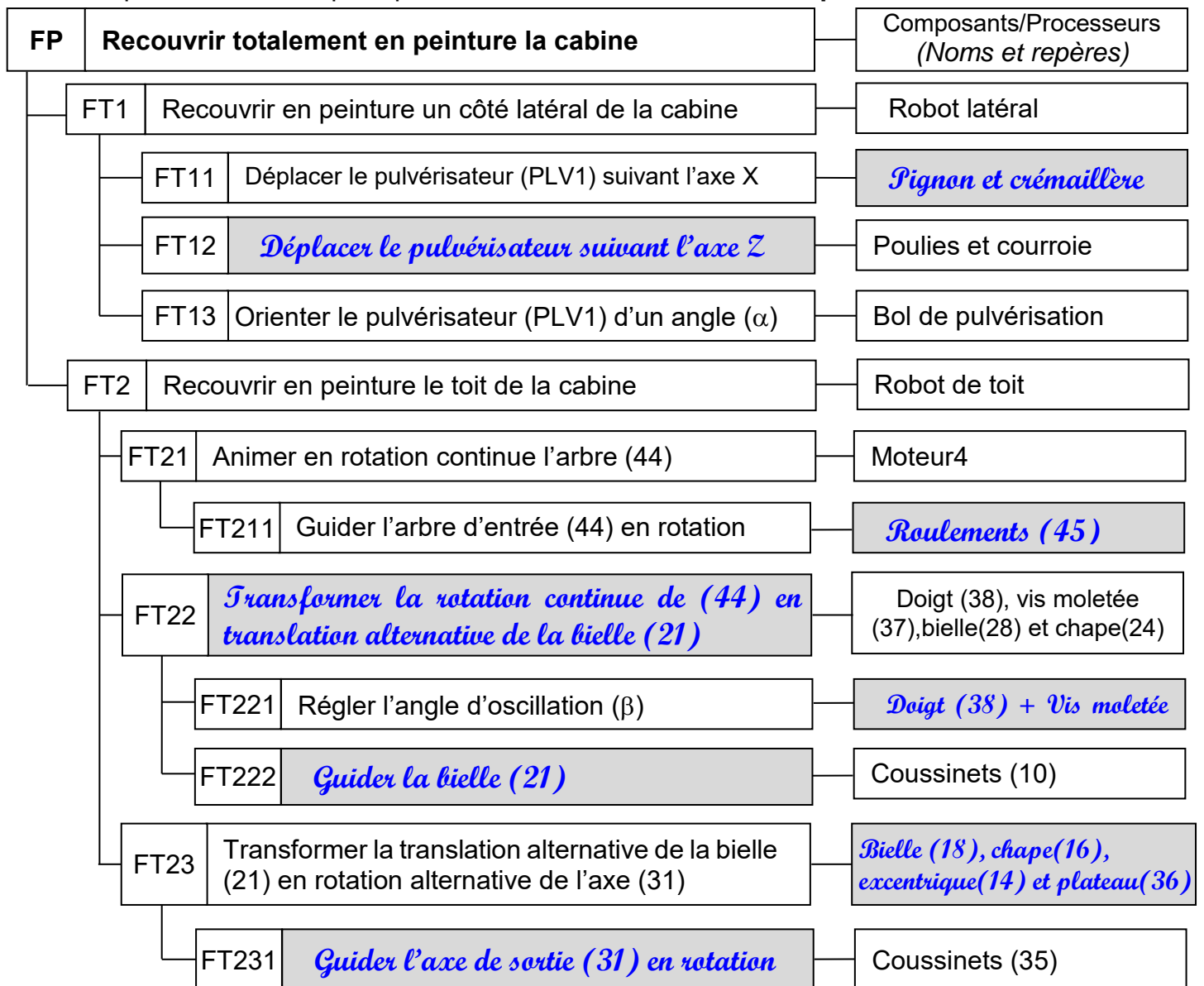
L'étude de la partie mécanique se limite aux mouvements des robots latéraux et du robot de toit de la station de peinture. (Figure 1 du dossier technique)

Pendant la phase de recouvrement en peinture d'un côté latéral de la cabine, le pulvérisateur (PLV1) se déplace en mouvement de translation suivant les axes X et Z, et pivote en rotation d'un angle ($\alpha = \pm 45^\circ$) autour de l'axe Y. (Figure 2 du dossier technique)

Pendant la phase de recouvrement du toit, le robot pivote les pulvérisateurs (PLV2) d'un mouvement alternatif de rotation d'un angle (β) autour de l'axe X. (Figure 2 du dossier technique)

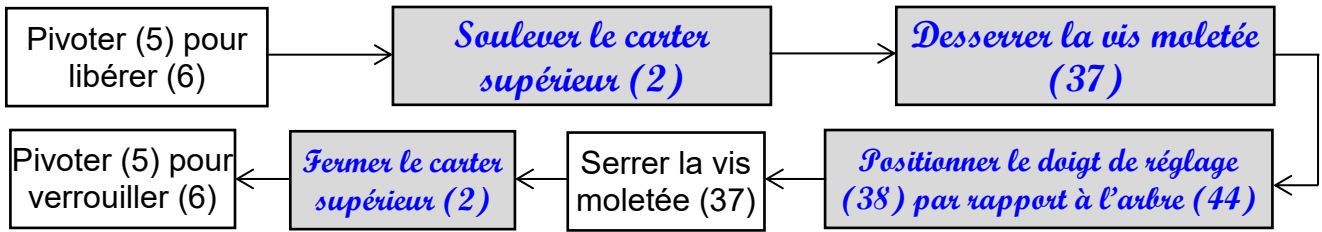
1. Analyse fonctionnelle

1.1. D'après le schéma cinématique de la station de peinture (dossier technique page 2/7) et le dessin d'ensemble du robot de toit (dossier technique page 7/7) ; compléter le diagramme FAST descriptif de la fonction principale FP : **Recouvrir totalement en peinture la cabine.**



1.2. Réglage de l'excentrique (E)

Compléter le graphe explicatif ci-dessous du réglage de l'excentrique (E). (Voir dessin d'ensemble)



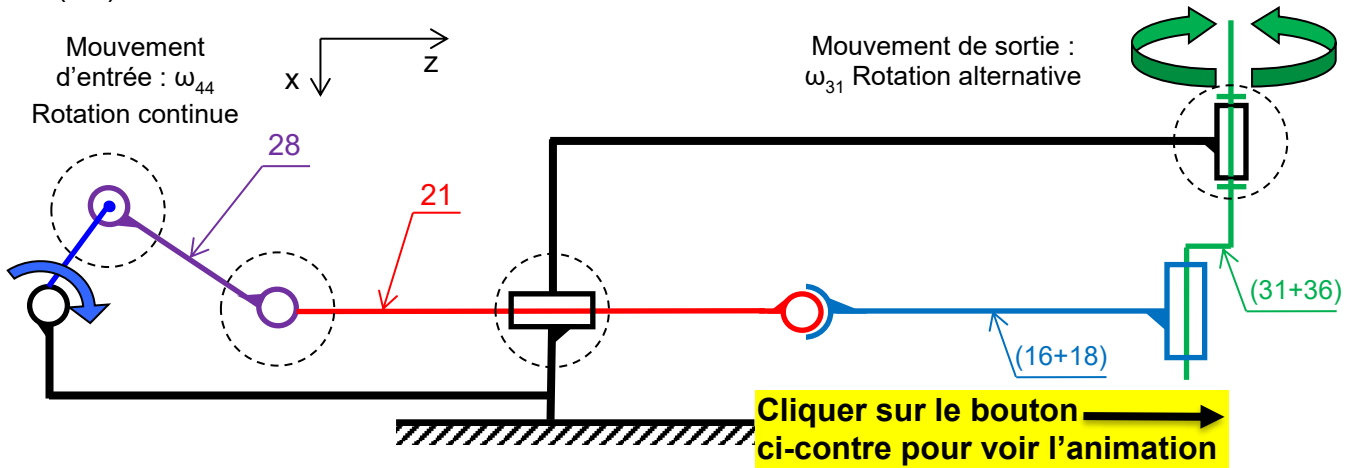
1.3. Se référer au dessin d'ensemble et compléter le tableau suivant par la forme et/ou l'élément, avec son repère, réalisant les assemblages suivant :

Assemblage	Surface(s) de mise en position	Maintien en position
(46)/(1)	Surface plane + surface cylindrique	Les 3 vis (29)
(38)/(44)	Surfaces planes	Vis à tête moletée (37)

2. Étude cinématique

2.1. Schéma cinématique

Se référer au dessin d'ensemble page 7/7 et compléter le schéma cinématique du robot de toit suivant le plan (x,z)

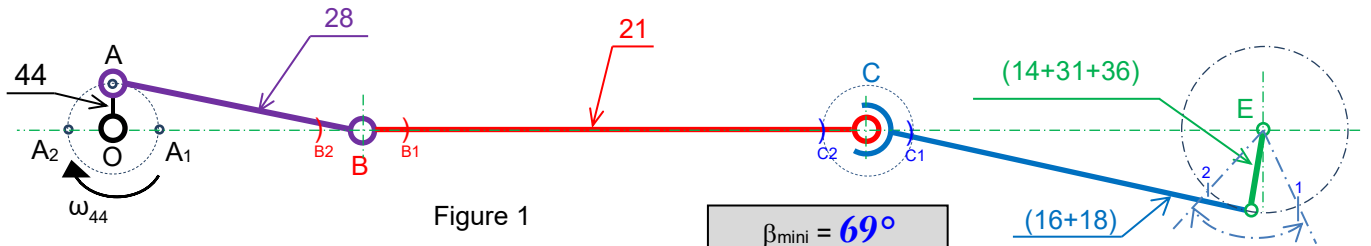


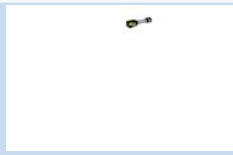
2.2. Vérification de l'angle d'oscillation β

L'angle d'oscillation β du pulvérisateur de toit est réglable suivant la valeur de l'excentrique «E». Sur les figures 1 et 2, on propose deux valeurs extrêmes de l'excentrique $E_1=OA_1=OA_2$ et $E_2=OA_3=OA_4$.

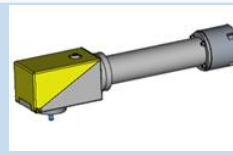
Remarque : les résultats de β_{mini} et de β_{Maxi} sont fonctions de la précision du tracé du candidat et sont acceptés avec une tolérances.

a. Représenter graphiquement pour chaque position de la manivelle OA les positions des points B, C et D relatives aux points A_1, A_2, A_3 et A_4 et déduire la valeur minimale de l'angle β dans premier cas et sa valeur maximale dans le deuxième cas.





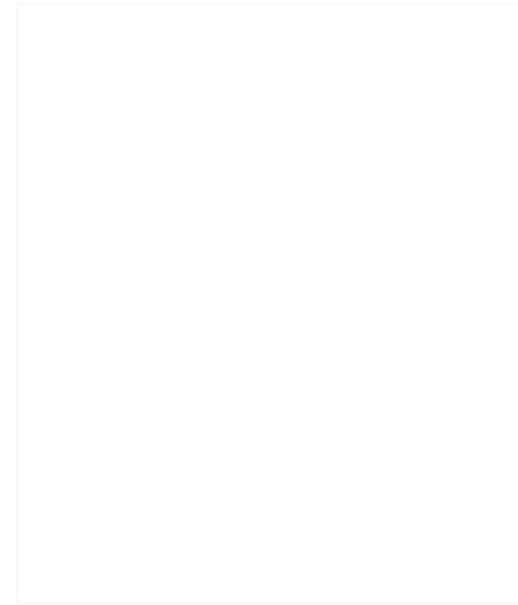
Vue 1

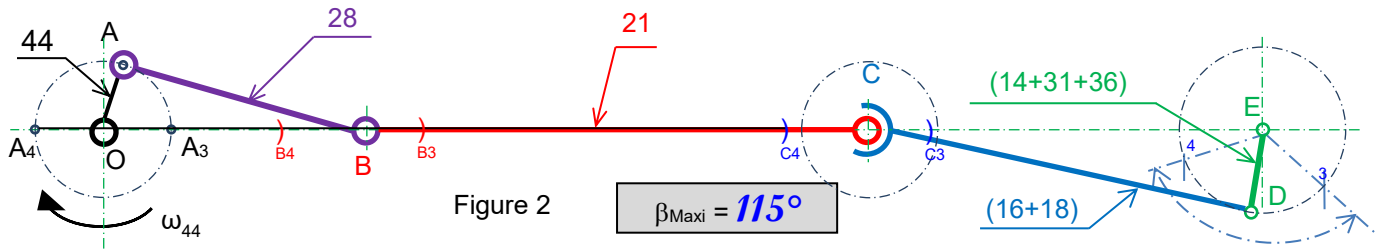


Par dfaut



Principale





b. Vérifier si les valeurs de β imposées par le cahier de charges fonctionnel sont respectées.

Les valeurs de β sont respectées

3. Étude en flexion du doigt de réglage (38)

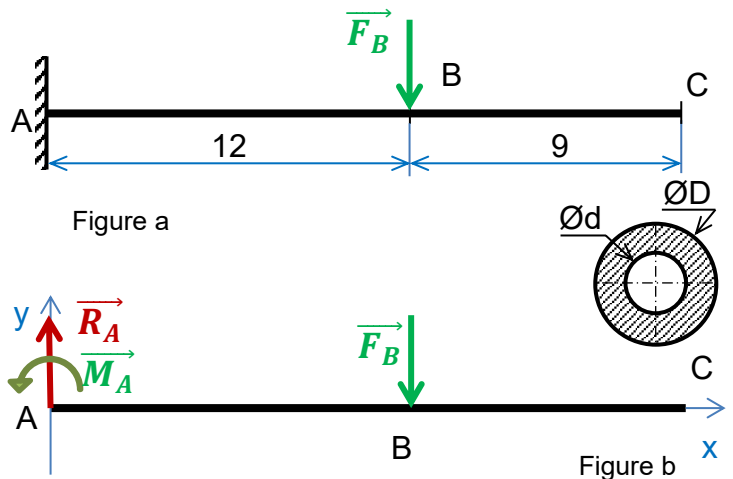
On assimile le doigt de réglage (38) à une poutre cylindrique creuse soumise à une charge $\|\vec{F}_B\| = 150\text{N}$. (Figure a)

3.1. Isoler la poutre AC, mettre en place les actions mécaniques puis calculer celles en A. (Figure b)

• $\|\vec{R}_A\| = \|\vec{F}_B\| = 150\text{N}$

• $\|\vec{M}_A\| = \|\vec{F}_B\| \times AB = 150 \times 0,012 = 1,8\text{ Nm}$

$\|\vec{M}_A\| = 1,8\text{ Nm}$ $\|\vec{R}_A\| = 150\text{ N}$



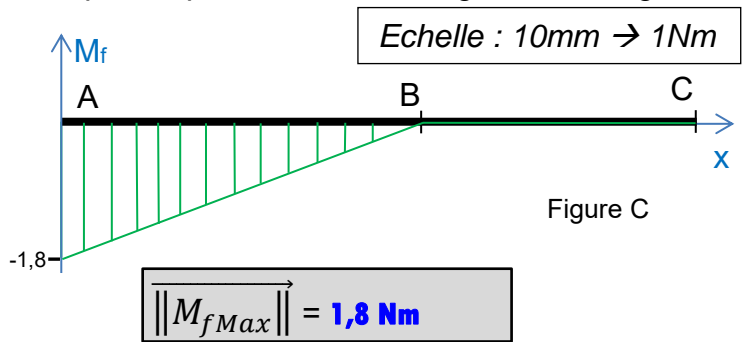
3.2. Calculer les moments fléchissants le long de la poutre puis tracer sur la figure c le diagramme correspondant.

Entre A et B: $\overline{M}_f = -(M_A - R_A \cdot x) = 150 \cdot x - 1,8$

* Pour $x=0 \Rightarrow \overline{M}_f = -1,8\text{ Nm}$

* Pour $x=0,012 \Rightarrow \overline{M}_f = 0$

Entre B et C: $\overline{M}_f = 0$



3.3. Déduire $\|\vec{M}_{fMax}\|$

3.4. On donne $R_p = 80\text{ N/mm}^2$ et $D = 2d$.

a. Déterminer la valeur de D_{min} pour que la poutre résiste en toute sécurité.

$$\frac{M_{f_{max}}}{\left(\frac{I_{GZ}}{v}\right)} \leq R_{pe} \Rightarrow \frac{M_{f_{max}} \times 32 \times D}{\pi \times (D^4 - d^4)} \leq R_{pe} \Rightarrow \frac{M_{f_{max}} \times 32 \times D}{\pi \times \left(\left(\frac{16D^4}{16}\right) - \left(\frac{D^4}{16}\right)\right)} \leq R_{pe} \Rightarrow \frac{M_{f_{max}} \times 32 \times D \times 16}{\pi \times 15 \times D^4} \leq R_{pe}$$

$\Rightarrow D \geq 3 \sqrt{\frac{M_{f_{max}} \times 32 \times 16}{\pi \times 15 \times R_{pe}}}$ **AN** $D \geq 3 \sqrt{\frac{1800 \times 32 \times 16}{\pi \times 15 \times 80}} \Rightarrow D \geq 6,25\text{mm}$

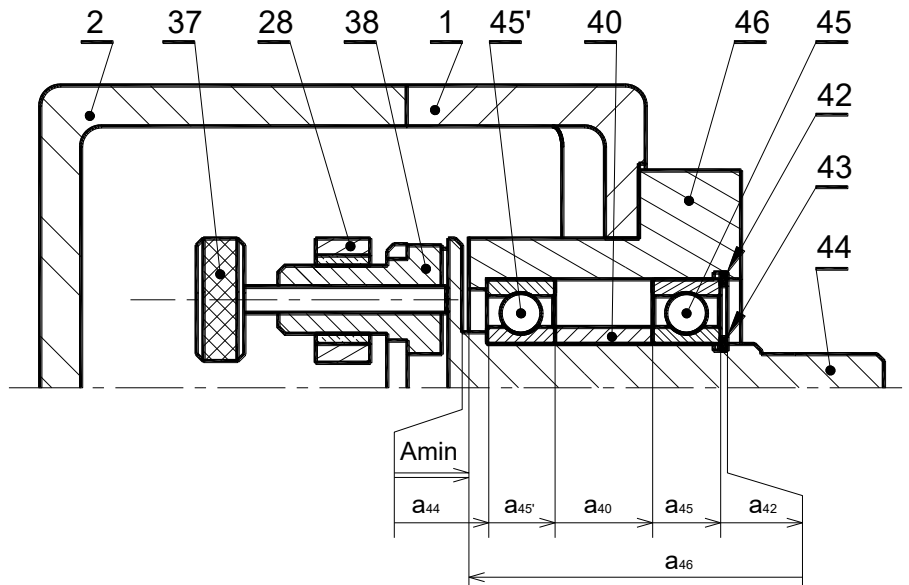
$D_{min} = 6,25\text{ mm}$

b. Déduire la valeur de d_{Max}

$d_{Max} = 3,125\text{ mm}$

4. Cotation fonctionnelle

Tracer la chaîne de cotes minimale relative à la condition A_{mini} .

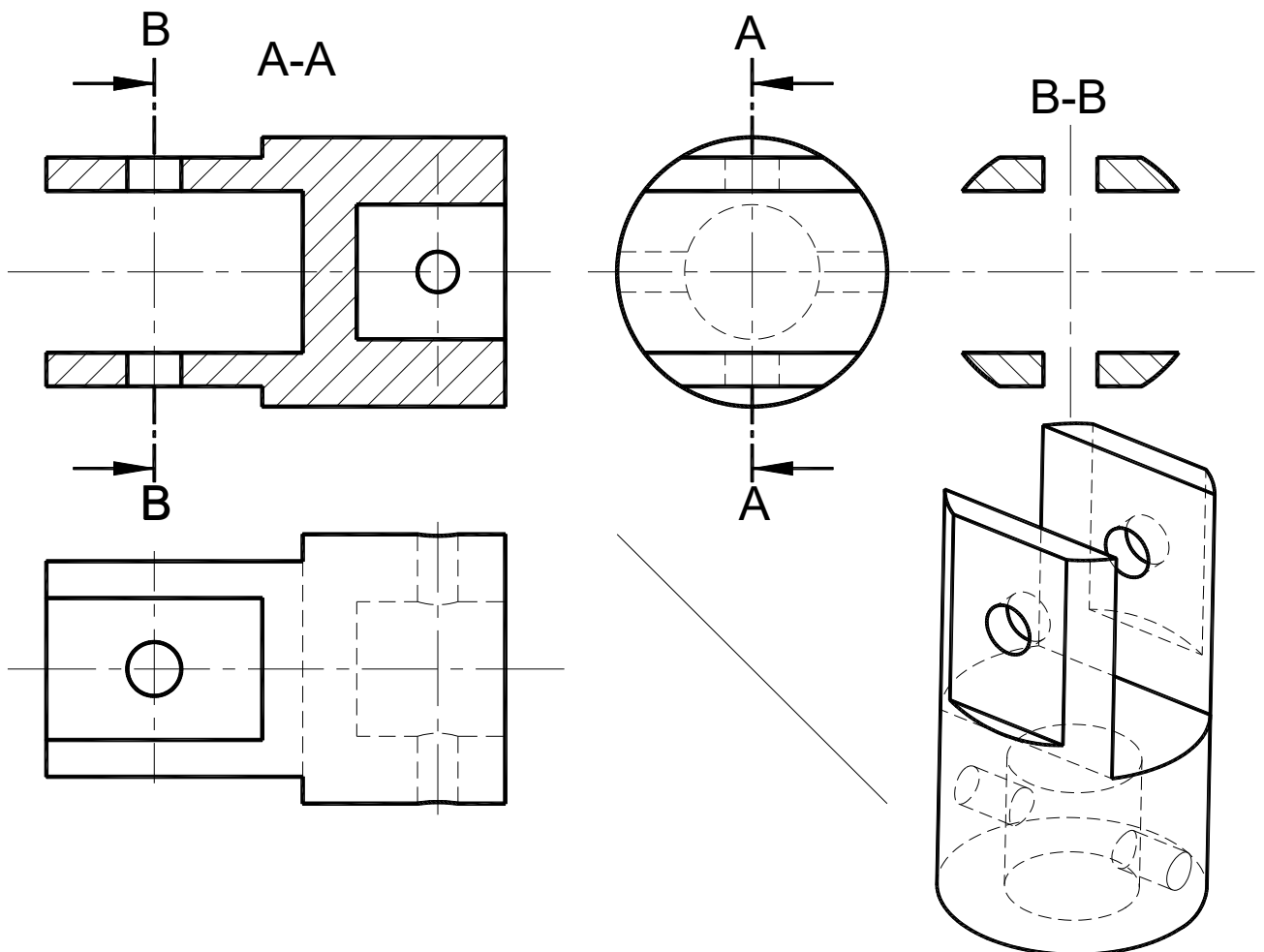


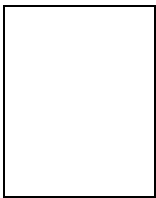
5. Dessin de définition de la chape (24)

On donne la représentation en 3D de la chape femelle (24) et sa vue de face en coupe A-A.

On demande de compléter à l'échelle du dessin la représentation graphique de la chape (24) par :

- La vue de gauche
- La vue de dessus
- La section sortie B-B





Section : N° d'inscription : Série :
 Nom et Prénom :
 Date et lieu de naissance :

Corrigé

Signatures des surveillants

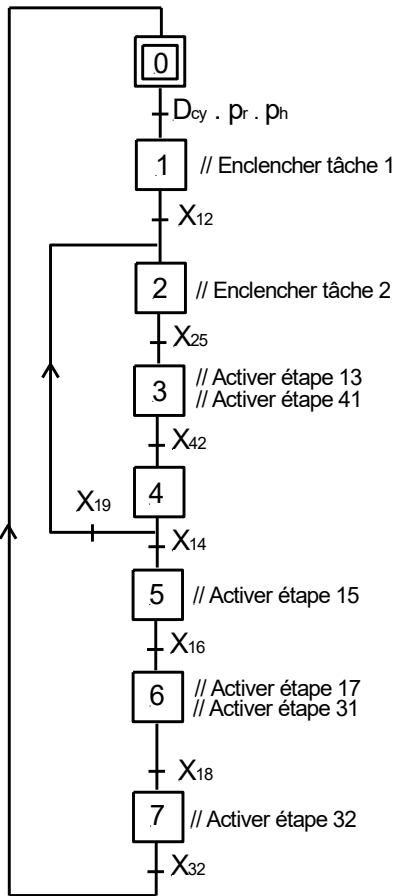
A. PARTIE GÉNIE ÉLECTRIQUE

1. Etude du grafcet synchronisé

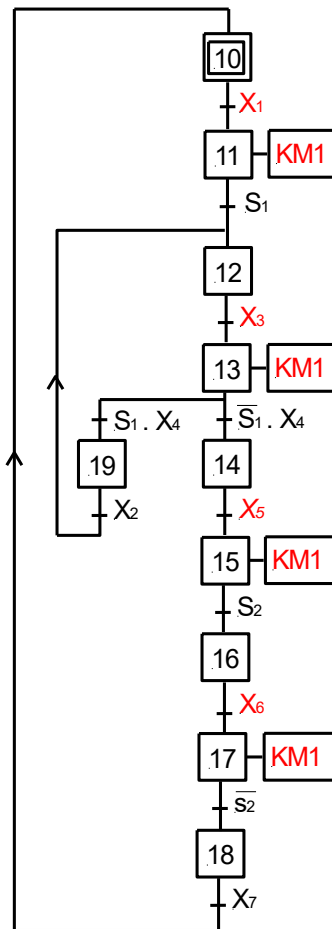
En se référant aux pages 1/7, 2/7 et 3/7 du dossier technique et au grafcet de coordination donné ci-dessous, compléter le grafcet synchronisé décrivant les tâches 1, 2 et 3.

N.B : Le fonctionnement du moteur MP ne fera pas l'objet des grafcets.

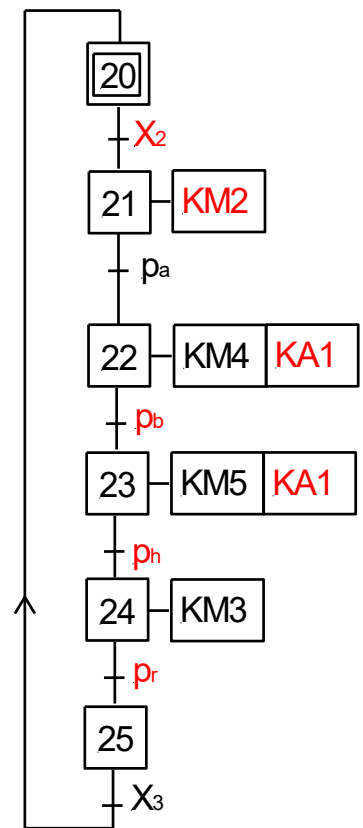
Grafcet de coordination



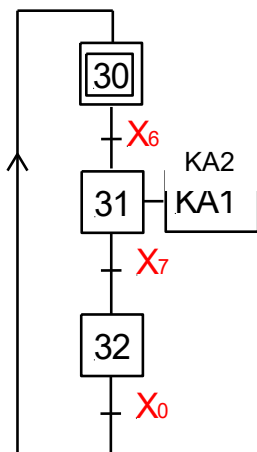
Tâche 1 : avancer la cabine



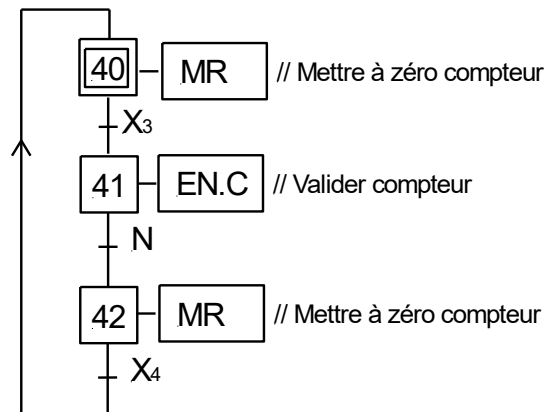
Tâche 2 : pulvériser les surfaces latérales



Tâche 3 : pulvériser le toit



Tâche 4 : compter les pas d'avance de la cabine



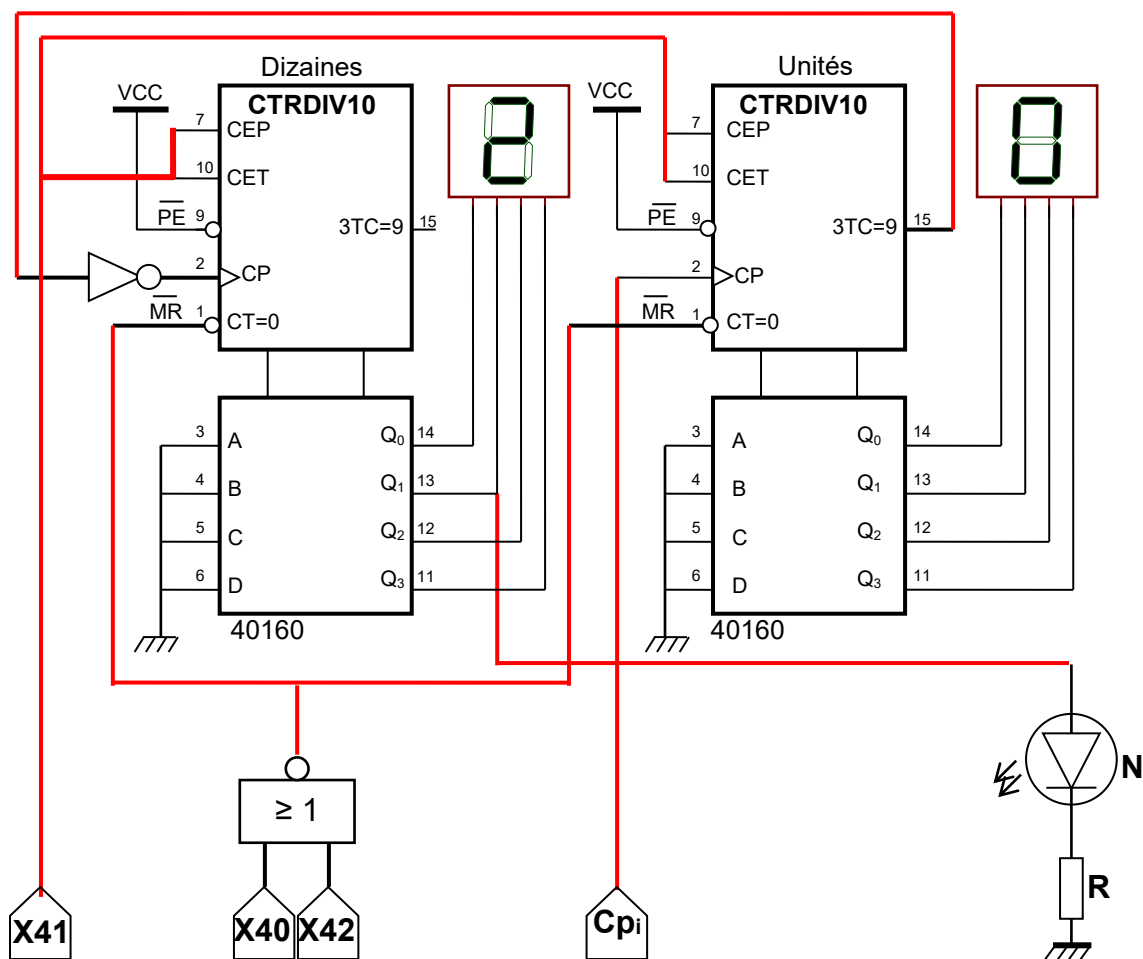
Ne rien écrire ici

2. Etude de la fonction comptage des pas d'avance de la cabine

2.1. Etude du système de comptage par circuit intégré 40160

En se référant à la page 5/7 du dossier technique, compléter sur le schéma du circuit logique ci-dessous :

- Le circuit de validation du compteur ;
- Le circuit de remise à zéro sachant que le compteur est remis à 0 quand l'étape 40 ou l'étape 42 du Grafcet est active ;
- Le circuit d'incrémentation du compteur et l'association en cascade des deux circuits intégrés ;
- Le circuit de la diode LED s'allumant lorsque $N = 1$, correspondant à 20 pas d'avance du convoyeur.



2.2. Etude du système de comptage par microcontrôleur PIC 16F876A

En se référant au paragraphe 4.2 de la page 5/7 du dossier technique, compléter les lignes d'instructions du programme donné à la page suivante en exploitant le commentaire associé à chaque ligne d'instruction.

N.B : Les quatre premières broches des deux ports B et C et la broche RA5 du port A sont configurées en sorties. Toutes les autres broches non connectées des ports A, B et C sont configurées en entrées.

Ne rien écrire ici

<pre>program tache_4;</pre>	// Entête du programme
<pre>const code7seg: array[10] of byte =(\$0,\$1,\$2,\$3,\$4,\$5,\$6,\$7,\$8,\$9);var unite : byte; dizaine : byte; X3: sbit at RA0_bit; X4: sbit at RA1_bit; MR: sbit at RA5_bit; N : bit; X40,X41,X42:bit;</pre>	// Code correspondant à l'affichage // Unités et dizaine, types octets // X3 et X4 types bit sur RA0 et RA1 // S42 : type bit, sur RA5 // N : variable comptage type bit ; // X40, X41 et X42 : type bit ;
<pre>Procédure affichage; begin unite:= TMR0 mod 10; dizaine:= TMR0 div 10; Portc:= code7seg[unite]; Portb:= code7seg[dizaine]; end;</pre>	// Procédure d'affichage // Début // Unité et dizaine // Affectation du port des unités // Affectation du port des dizaines // Fin
<pre>begin trisA:=\$1F.....; trisB:=... \$F0...;trisC:=... \$F0;</pre>	// Configuration des registres tris // Configuration du port A // Configuration des ports B et C
<pre>ADCON1:=\$87.....; OPTION_REG := \$E8;</pre>	// Port A numérique // compteur à front montant sur RA4
<pre>TMR0:=0.....;</pre>	// TMR0 ← 0 ;
<pre>PortB:=..... 0.....;PortC:=0.....;</pre>	// Port B ← 0 ; Port C ← 0 ;
<pre>N:=... 0 ...; ... X40:=1; X41:=0; X42:=0.....;</pre>	// N ← 0 ; // X40 ← 1 ; X41 ← 0 ; X42 ← 0 ;
<pre>..... while true do.....</pre>	// Boucle Tant que
<pre>Begin</pre>	// Début
<pre>... affichage.....;</pre>	// Appel de la procédure affichage
<pre>X40 := ...(X42 and X4) OR (X40 and NOT(X41))..; X41 := ...(X41 and X3) OR (X41 and NOT(X42))..; X42 := ...(X41 and N) OR (X42 and NOT(X40))..;</pre>	//Equation de l'étape 40 //Equation de l'étape 41 //Equation de l'étape 42
<pre>if (TMR0=20) then N:=1 else N:=0;</pre>	// Si TMR0 =20 alors N←1 sinon N←0 ;
<pre>if ((X40=1) OR (X42=1)) then TMR0:=0;</pre>	// Remise à zéro de TMR0
<pre>if ((X40=1) OR (X42=1)) then MR:=1 else MR:=0..;</pre>	// Equation de la sortie MR
<pre>... end...; ... end... .</pre>	// Fin tant que ; // Fin programme.

3. Etude du moteur M1

3.1. Relevé et calcul des grandeurs électriques et des grandeurs mécaniques

Se référer dans cette partie aux caractéristiques mécaniques $T_u(n)$ et $Tr(n)$ données à la page 6/7 du dossier technique. Remplir le tableau ci-dessous par l'expression et la valeur avec son unité de chacune des grandeurs demandées.

	Point de fonctionnent		Vitesse de synchronisme "n _s "	Puissance utile "P _u "	Rendement "η"	Courant en ligne "I"
	Couple utile "T _u "	Vitesse du rotor "n"				
Expression	D'après la courbe			$P_u = T_u \times \Omega$	$\eta = 1 - g$ ou P_u/P_a	$\frac{P_u}{(1-g) \times U \times \sqrt{3} \times \cos(\varphi)}$
Valeur et unité	15Nm	950tr/min	1000tr/min	1491,5W	95%	2,95A

Ne rien écrire ici

3.2. Dimensionnement et choix du moteur M1

Se référer dans cette partie au document constructeur donné au dossier technique à la page 6/7 et aux résultats de la question immédiatement précédente.

a. Choisir la référence du moteur convenable à l'entraînement du convoyeur. Relever les valeurs des caractéristiques correspondantes.

Référence : FLS 100LK	
Pn (puissance nominale) = ... 1,5KW ...	n _n (Vitesse nominale) = 955tr/min
Tn (Couple nominal) = 15Nm	In (courant nominal) = 3,5A

b. Choisir la référence des appareils de la chaîne de commande et de protection du moteur M1

Contacteur tripolaire	Relais thermique tripolaire
LC1 D09 LRD 08

4. Etude du circuit de détection du sens de rotation

4.1. Etude de fonctionnement de l'A.L.I 2

Se référer dans cette étude au montage à base d'A.L.I et à la caractéristique de transfert donnés à la page 6/7 du dossier technique.

a. Quel est le régime de fonctionnement de l'A.L.I.2 ? En déduire la fonction réalisée par ce montage ?

.....**Régime saturé**.....
**Comparateur double seuil non Inverseur**.....

b. Déterminer les valeurs des deux tensions de basculement V⁺ et V⁻ et les valeurs des tensions de saturation +V_{sat} (+V_{CC}) et -V_{sat} (-V_{CC}).

V⁺ =**+ 4V**..... +V_{sat} =**+ 15V**.....
 V⁻ =**- 4V**..... -V_{sat} =**-15V**.....

c. Etablir les expressions des tensions seuils V⁺ et V⁻ en fonction de R₁, R₂ et V_{sat}.

V⁺ =**(-R₁/R₂)x(-V_{sat})**..... V⁻ =**(-R₁/R₂)x(+V_{sat})**.....

d. Quelle est la valeur de R₁ si R₂ = 10KΩ.

$$R_1/R_2 = V^+/V_{sat} \Rightarrow R_1 = R_2 \cdot (V^+/V_{sat}) = 10 \cdot 10^3 \cdot (4/15) = 2,66K\Omega$$

.....**(R₁ = 2,66KΩ)**.....

4.2. Etude de l'étage de puissance

En se référant à la page 6/7 du dossier technique, analyser le fonctionnement de l'étage de puissance en complétant le tableau ci-dessous :

Tension V _s	Etat des transistors Q1 et Q2 (Saturé ou bloqué)		Etat des relais KA3 et KA4 (Excité ou non excité)		Sens du courant dans l'induit du moteur MP De (A vers B) ou de (B vers A)
	Q1	Q2	KA3	KA4	
+V _{sat}	Saturé	Bloqué	Excité	Non excité	De A vers B
-V _{sat}	Bloqué	Saturé	Non excité	Excité	De B vers A

Exercice 1 : (5 points)

1) a) $e^{i\frac{5\pi}{12}} (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = e^{i(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4})} - e^{i(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$
 $e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}} (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = 2i \sin \frac{\pi}{4} e^{i\frac{5\pi}{12}} = i\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} \quad ; \quad \left(\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

b) $z_1^2 - (2i\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}) z_1 - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4i\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} - 4e^{i\frac{\pi}{6}}$
 $= 4(e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}) - 4i\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$
 $= 4i\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} - 4i\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} = 0$

D'où z_1 est solution de l'équation(E)

c) $z_1 z_2 = -4 e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $z_2 = \frac{-4 e^{i\frac{\pi}{6}}}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} = -2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$

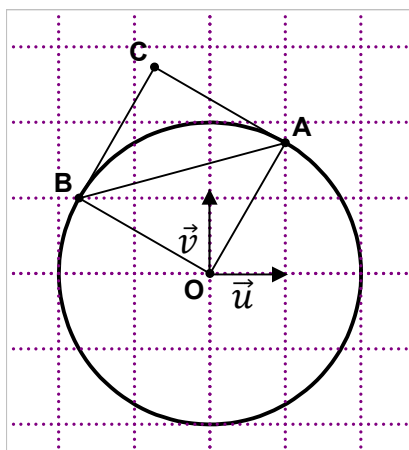
d) $z_1 = -2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3}$
 $z_2 = -2 e^{-i\frac{\pi}{6}} = -2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = -\sqrt{3} + i$

2) a) $iz_A = i(1 + i\sqrt{3}) = i - \sqrt{3} = z_B$

b) $\frac{\text{aff}(\overline{OB})}{\text{aff}(\overline{OA})} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{iz_A}{z_A} = i$ donc $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ ainsi OAB est rectangle en O

$\left| \frac{z_B}{z_A} \right| = \frac{|z_B|}{|z_A|} = |i| = 1$ donc $|z_A| = |z_B|$ d'où $OA = OB$ et par suite OAB est isocèle en O

c)



3) a) $z_C - z_B = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} - i = 1 + i\sqrt{3} = z_{\overline{OA}}$ donc $\overline{BC} = \overline{OA}$
 d'où OACB est un parallélogramme ; et comme le triangle OAB est isocèle et rectangle en O, donc OACB est un carré.

b) Voir figure ci-dessus.

c) OACB est un carré de cote 2 donc $OC = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\arg(z_C) &= (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + 2k\pi \\ &= \arg(z_A) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\end{aligned}$$

$$\text{d'où } z_C = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

Exercice 2 : (4,5 points)

1) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ d'où \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AB} ne sont pas

colinéaires ; et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $P = (ABC)$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P

Donc une équation de P est $-5x - 5z + d = 0$

$A(1,2,-1) \in P$ donc $-5 + 5 + d = 0$ ainsi $d = 0$

Et par suite P: $-5x - 5z + d = 0$ donc $x + z = 0$ est une équation cartésienne de P

2) $\Delta: \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 2 \\ z = \alpha - 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

a) $A(1,2,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + 1 \\ 2 = 2 \\ -1 = \alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2 = 2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ donc $A \in \Delta$

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ . Comme \vec{n} et \vec{u} sont colinéaires donc $\Delta \perp P$

3) $I_\alpha(1 + \alpha, 2, \alpha - 1) \in \Delta$

a) $d(I_\alpha, P) = \frac{|\alpha+1+\alpha-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2\alpha|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\alpha|$

b) $d(I_\alpha, P) > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|\alpha| > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |\alpha| > 2$ donc :

si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ alors le plan est extérieur à la sphère(S_α)

Si $\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$ alors le plan P est tangent à la sphère(S_α)

Si $\alpha \in]-2, 2[$ alors le plan P est sécant à la sphère(S_α)

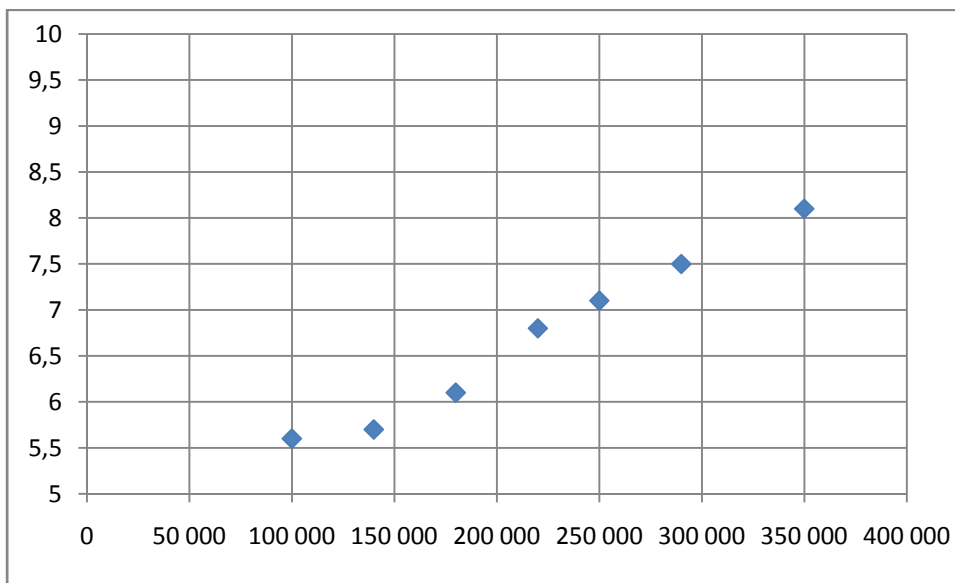
4) a) $B(2,0,-2) \in S_\alpha$ donc $I_\alpha B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow I_\alpha B^2 = 8$
 $\Leftrightarrow (2 - \alpha - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (-2 - \alpha + 1)^2 = 8$
 $\Leftrightarrow (1 - \alpha)^2 + 4 + (-1 - \alpha)^2 = 8$
 $\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 6 = 8$
 $\Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ où $\alpha = -1$

b) $-1 \in]-2,2[$ et $1 \in]-2,2[$ donc $S_\alpha \cap P$ ($\alpha = 1$ où $\alpha = -1$) est un cercle.

Comme $I_\alpha \in \Delta$ et $\Delta \perp P$ en A ; alors A est le projeté orthogonal de I_α sur P donc $S_\alpha \cap P$ est le cercle C_α de centre A et de rayon $r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{6}$

Exercice 3 :(4 points)

1) a)



b) $r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0,990$

c) le coefficient de corrélation $r > \frac{\sqrt{3}}{2}$

On peut envisager un ajustement affine de la série(X, Y)

2) a) L'équation de la droite de régression de Y en X est :

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} \cong 1,078 \times 10^{-5} ; b = \bar{Y} - 1,078 \times 10^{-5} \times \bar{X} = 4,344$$

D'où $y = 1,078 \times 10^{-5}x + 4,344$

b) l'équation de la droite de régression de X en Y est : $x = a'y + b'$ avec :

$$a' = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)} = 91011,236 \text{ et } b' = \bar{X} - 91011,236 \times \bar{Y} = -391203,853$$

D'où $x = 91011,24y - 391203,85$

3) $x = 400\ 000$ donc la consommation $y = 1,078 \times 10^{-5} \times 400\ 000 + 4,344 = 8,66$

4) $y > 8,5 \Leftrightarrow x > 91011,24 \times 8,5 - 391203,85 \Leftrightarrow x > 382391,69$

Exercice 4 : (6,5 points)

1) $h(x) = x - 1 + x \ln x$; $x \in]0, +\infty[$

a) $h(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$

b)

x	0	1	$+\infty$
$h(x)$		0	+

2) $f(x) = 1 + (x - 1) \ln x$; $x \in]0, +\infty[$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + (x - 1) \ln x = +\infty$.

La courbe(C) admet une asymptote vertical d'équation $x = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x - 1) \ln x = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + (x-1) \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x} \ln x = +\infty$. La courbe(C)

admet un branche parabolique de direction celle de (o, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$

3) a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \frac{x \ln x + x - 1}{x} = \frac{h(x)}{x}$

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$ le signe de $(f'(x))$ est celui du signe de $(h(x))$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4) a) $f(x) = x \Leftrightarrow 1 + (x - 1) \ln x = x$

$$\Leftrightarrow x - 1 - (x - 1) \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(1 - \ln x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e$$

b) $f(x) \leq x \Leftrightarrow (x - 1)(1 - \ln x) \geq 0$

x	0	1	e	$+\infty$
$x - 1$		0	+	+
$1 - \ln x$	+	+	0	-
$(x - 1)(1 - \ln x)$	-	0	+	-

D'où $f(x) \leq x \Leftrightarrow x \in [1, e]$

c) Position de (C) et Δ : $y = x$

$$x - f(x) = (x - 1)(1 - \ln x)$$

x	0	1	e	$+\infty$		
$x - f(x)$		-	0	+	0	-
Position de (C) et Δ		(C) est au dessus de Δ	(C) est au dessous de Δ	(C) est au dessus de Δ		

Les points de coordonnées $(1,1)$ et (e, e) sont les points d'intersection de (C) et Δ

5) Voir Annexe.

6) a) $\int_1^e (x \ln x) dx$; On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\text{Donc } \int_1^e (x \ln x) dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2} \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

b) $A = \int_1^e x - f(x) dx$

$$= \int_1^e (x - 1) dx - \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^e - \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \right) + [x \ln x - x]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \frac{1}{4}e^2 - e + \frac{5}{4}$$

7) On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Par récurrence :

Pour $n = 0$; $u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq e$. Vrai pour $n = 0$

Supposons que $1 \leq u_n \leq e$; pour $n \geq 0$

Démontrons que $1 \leq u_{n+1} \leq e$

$1 \leq u_n \leq e$ et f est croissante sur $[1, e]$ donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$

Ainsi $1 \leq u_{n+1} \leq e$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [1, e]$

b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ or $f(x) \leq x \Leftrightarrow x \in [1, e]$

Comme $u_n \in [1, e]$ alors $f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$, ainsi (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1

Donc elle converge vers $l \in [1, e]$

Comme f est continue sur $[1, e]$ donc en l d'où $f(l) = l$ et par suite $l = 1$ ou $l = e$

Or (u_n) est décroissante et $u_0 = 2 < e$ donc $l = 1$

Feuille Annexe

